

I. 1-a) Comme r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2} \neq 0 \pmod{2\pi}$,

$r' = t \circ r$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Puisque ABCD est un carré direct, on a

$$r'(A) = t(r(A)) = t(B) = C$$

$$r'(B) = t(r(B)) = t(C) = D$$

c) Le centre de r' est l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$, c'est-à-dire le centre J du carré ABCD.

2- On note $f = r' \circ h$.

a) Puisque r' est une rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

elle est une similitude directe de centre J , d'angle $\frac{\pi}{2}$ et

de rapport 1.

De même, h est une similitude directe de centre C , de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle 0.

Il en résulte que $f = r' \circ h$ est une similitude directe

d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\sqrt{3}$.

b) Soit I le centre de la similitude directe f .

$$f(C) = r'(h(C)) = r'(C) = t(r(C)) = D$$

On en déduit que : $(\overline{IC}, \overline{ID}) = \frac{\pi}{2}$ et $ID = \sqrt{3} IC$.

c) Le triangle (ICD) étant rectangle en I , on a :

$$\tan(\overline{CD}, \overline{CI}) = \frac{ID}{IC} = \frac{\sqrt{3} IC}{IC} = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$$

On en déduit $(\overline{CD}, \overline{CI}) = \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$

Construction du point I :

• $(\overline{CD}, \overline{CI}) = \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$: Le point I appartient à la droite Δ ,

image de la droite (CD) par la rotation de centre C

et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

• $(\overline{IC}, \overline{ID}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$: Le point I appartient au cercle Γ de

diamètre $[CD]$

• I est le point d'intersection de Δ et Γ . Voir le point I sur la figure précédente.

$$d) (\mathcal{E}) = \{M \in P / MD^2 - 3MC^2 = 0\}$$

Soit G le barycentre du système $\{(D, 1); (C, -3)\}$

on a $\overline{GD} - 3\overline{GC} = \vec{0}$ soit $\overline{DG} = \frac{3}{2}\overline{DC}$ ou $\overline{CG} = \frac{1}{2}\overline{DC}$

$M \in (\mathcal{E})$ équivaut à $-2MG^2 + GD^2 - 3GC^2 = 0$

$$-2MG^2 + \frac{9}{4}DC^2 - \frac{3}{4}DC^2 = 0$$

$$MG^2 = \frac{3}{4}DC^2 \text{ soit } MG = \frac{\sqrt{3}}{2}DC$$

$(\mathcal{E})$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}DC$.

• Voir le tracé de $(\mathcal{E})$ sur la figure précédente.

Remarque :

Comme $ID = \sqrt{3} IC$, on a $ID^2 = 3 IC^2$

soit $ID^2 - 3 IC^2 = 0$ et donc $I \in (\mathcal{E})$

II. 1- $z_A = 0$; $z_B = 1$; $z_D = i$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} \text{ donc } z_C = z_B + z_D = 1 + i$$

$$z_J = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1 + i}{2}$$

$$z_K = \frac{z_D + z_C}{2} = \frac{i + 1 + i}{2} = \frac{1 + 2i}{2}$$

2- a) Expression complexe de S

$$z' = az + b \text{ où } a, b \in \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} S(A) = J \\ S(C) = K \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} az_A + b = z_J \\ az_C + b = z_K \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} b = \frac{1+i}{2} \\ (1+i)a + b = \frac{1+i}{2} \end{cases}$$

$$\text{par suite } a = \frac{\frac{1+i}{2} - \left(\frac{1+i}{2}\right)}{1+i} = \frac{i}{1+i} = \frac{1}{4}(1+i)$$

$$z' = \frac{1}{4}(1+i)z + \frac{1+i}{2}$$

b) Eléments géométriques de S

$$\text{Centre } \Omega : z_\Omega = \frac{\frac{1+i}{2} + \frac{1+i}{2}}{1 - \frac{1}{4}(1+i)} = \frac{1+i}{\frac{3-i}{4}} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$\text{Rapport } k : k = \left| \frac{1}{4}(1+i) \right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Angle } \theta : \theta = \arg\left(\frac{1}{4}(1+i)\right) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

S est la similitude plane directe de centre Ω $\left(z_\Omega = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i\right)$,

de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Partie B.

1- R_E est la rotation de centre E et d'angle θ ; R_F^{-1} la rotation de centre F et d'angle $-\theta$. Comme $\theta - \theta = 0$, il en résulte que $R_E \circ R_F^{-1}$ est une translation.

2- On note $H = R_F(E)$, $P = R_F(G)$ et $Q = R_E(G)$.

$$Q = R_E(G) = R_E(R_F^{-1}(P)) = R_E \circ R_F^{-1}(P)$$

$$E = R_E(E) = R_E \circ R_F^{-1}(H)$$

Comme $R_E \circ R_F^{-1}$ est une translation, il en résulte que

$\overline{EH} = \overline{QP}$ et donc EHPQ est un parallélogramme.

PROBLEME 2**Partie A.**

1- On pose $g(x) = -\frac{1}{x} + \ln x$.

a) La fonction g est définie sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} > 0.$$

La fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b) • La fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

$$\text{Par ailleurs } g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3} + \ln \frac{3}{2} \approx -0,26 < 0$$

$$\text{et } g(2) = -\frac{1}{2} + \ln 2 \approx 0,19 > 0.$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle

$$\text{que } \frac{3}{2} < \alpha < 2.$$

• Signe de $g(x)$.

De g strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$, on déduit :

- pour $x < \alpha$, on a $g(x) < g(\alpha)$ soit $g(x) < 0$

- pour $x > \alpha$, on a $g(x) > g(\alpha)$ soit $g(x) > 0$

On sait que $g(\alpha) = 0$.

2- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$.

f est définie sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ et }$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{e^x} \right) = 0 \times 0 = 0$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot e^x - e^x \ln x}{(e^x)^2} = \frac{e^x \left(\frac{1}{x} - \ln x \right)}{(e^x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x} = \frac{-g(x)}{e^x}$$

$f'(x)$ et $-g(x)$ sont de même signe car $e^x > 0$

Tableau de variation de f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

3- • De $g(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} + \ln \alpha = 0$, on déduit $\ln \alpha = \frac{1}{\alpha}$.

$$\text{Par suite } f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{e^\alpha} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{e^\alpha} = \frac{1}{\alpha e^\alpha}.$$

• Comme $\frac{3}{2} < \alpha < 2$, on a $e^{\frac{3}{2}} < e^\alpha < e^2$ et donc

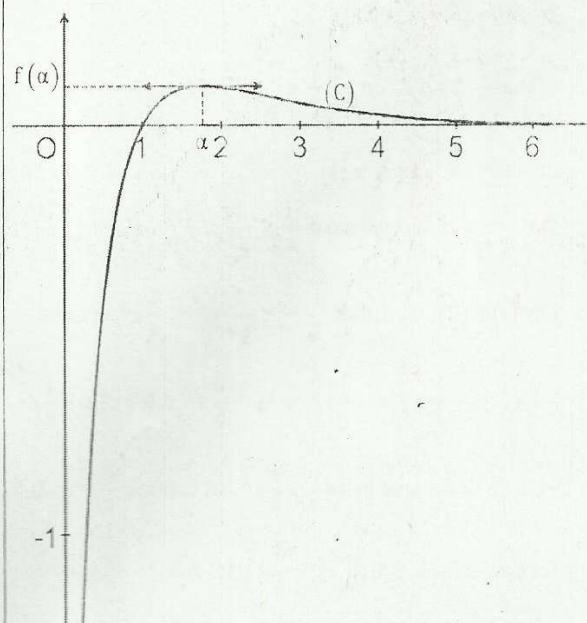
$$\frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}} < \alpha e^\alpha < 2e^2.$$

Par conséquent $\frac{e^{-2}}{2} < \frac{1}{\alpha e^\alpha} < \frac{2e^{-\frac{3}{2}}}{3}$, soit

$$\frac{e^{-2}}{2} < f(\alpha) < 2 \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{3}.$$

Remarque : $\frac{e^{-2}}{2} \approx 0,07$ et $2 \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{3} \approx 0,15$

4- Tracé de la courbe (C) .



5- On pose $G(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t) dt$, pour tout $x > 0$.

On peut écrire $G(x) = \int_{2x}^0 f(t) dt + \int_0^{x^2} f(t) dt$

$$G(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt - \int_0^{2x} f(t) dt$$

• La fonction $x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $F' = f$.

• La fonction $x \mapsto F_1(x) = x^2$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $F_1'(x) = 2x$.

• La fonction $x \mapsto F_2(x) = 2x$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $F_2'(x) = 2$.

Il en résulte que la fonction $G = F \circ F_1 - F \circ F_2$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$$G'(x) = F_1'(x)F'(F_1(x)) - F_2'(x)F'(F_2(x))$$

$$G'(x) = 2x f(x^2) - 2f(2x)$$

$$G'(x) = 2x \frac{\ln x^2}{e^{x^2}} - 2 \frac{\ln 2x}{e^{2x}}$$

Partie B.

On pose pour tout $x > 0$, $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

$$1- g(x) = 0 \text{ équivaut à } -\frac{1}{x} + \ln x = 0$$

$$\text{équivaut à } \ln x = \frac{1}{x} \text{ équivaut à } x = e^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{équivaut à } h(x) = x.$$

$$2- h'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

• Pour $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$, on a $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{2}{3}$, et

$$\text{donc } e^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{2}{3}} \quad (1)$$

$$\text{De } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{2}{3}, \text{ on a aussi } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{4}{9} \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2), on déduit } \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} \text{ et donc}$$

$$-\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} \leq -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \leq -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} \text{ soit } -\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}}$$

• On en déduit que $|h'(x)| \leq \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$. Et comme $\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} \approx 0,87$,

il existe donc $k \in]0; 1[$, $k = \frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}}$ tel que

$$\text{pour tout } x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], |h'(x)| \leq k.$$

3- Comme la fonction h est dérivable sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ et qu'il

existe un réel $k \in]0; 1[$ tel que $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], |h'(x)| \leq k$

on a d'après le théorème des inégalités des accroissements

finis : pour tout $x, y \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], |h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$

4- On définit la suite (U_n) par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = h(U_n)$.

a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $U_0 = 2$ et on a bien

$$\frac{3}{2} \leq U_0 \leq 2. \text{ La propriété est vraie pour } n = 0.$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$ et

$$\text{montrons que } \frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq 2.$$

D'après l'hypothèse on a $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$ donc

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{U_n} \leq \frac{2}{3}, \text{ par suite } e^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{U_n}} \leq e^{\frac{2}{3}} \text{ c'est-à-dire}$$

$$e^{\frac{1}{2}} \leq U_{n+1} \leq e^{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Or } e^{\frac{1}{2}} \approx 1,6 \geq \frac{3}{2} \text{ et } e^{\frac{2}{3}} \approx 1,94 \leq 2, \text{ donc } \frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq 2.$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$.

b) Comme $\alpha \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$,

on a d'après la question 3- précédente,

$$|h(U_n) - h(\alpha)| \leq k|U_n - \alpha|$$

$$\text{c'est-à-dire } |U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$$

c) Montrons par récurrence que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha|$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $|U_0 - \alpha| \leq |U_0 - \alpha|$

$$\text{soit } |U_0 - \alpha| \leq k^0 |U_0 - \alpha| \text{ car } k^0 = 1$$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha|$

$$\text{et montrons que } |U_{n+1} - \alpha| \leq k^{n+1} |U_0 - \alpha|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $|U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$ d'après la question b).

$$\text{Or par hypothèse de récurrence } |U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha|,$$

$$\text{donc } |U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha| \leq k \cdot k^n |U_0 - \alpha|$$

$$\text{soit encore } |U_{n+1} - \alpha| \leq k^{n+1} |U_0 - \alpha|$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha|$

• De ce qui précède et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (k^n |U_0 - \alpha|) = 0$,
on a d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - \alpha| = 0$
c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

Partie C.

On considère l'équation différentielle (E)

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}.$$

$$1- f(x) = \frac{\ln x}{e^x}; \quad f'(x) = \frac{-g(x)}{e^x} = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x};$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-g'(x)e^x + g(x)e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{-\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)e^x + \left(-\frac{1}{x} + \ln x\right)e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \ln x\right)e^x}{e^{2x}} = \frac{-\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \ln x\right)}{e^x} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) &= \frac{-\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \ln x\right)}{e^x} + 3 \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x} + 2 \frac{\ln x}{e^x} \\ &= \frac{-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \ln x + \frac{3}{x} - 3 \ln x + 2 \ln x}{e^x} \\ &= \frac{-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \ln x}{e^x} = \frac{x-1}{x^2} e^{-x} \end{aligned}$$

$$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$$

La fonction f est bien une **solution de l'équation (E)**.

2- Soit ϕ une fonction deux fois dérivables sur $]0; +\infty[$.

• Si ϕ est une solution de l'équation (E), alors

$$\phi'' + 3\phi' + 2\phi = \frac{x-1}{x^2} e^{-x} \quad (1)$$

Or, d'après la question 1-, on a

$$f'' + 3f' + 2f = \frac{x-1}{x^2} e^{-x} \quad (2)$$

De (1) et (2), on déduit que $\phi'' - f'' + 3\phi' - 3f' + 2\phi - 2f = 0$

$$\text{ou encore } (\phi - f)'' + 3(\phi - f)' + 2(\phi - f) = 0$$

c'est-à-dire la fonction $\phi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 3y' + 2y = 0$

• Réciproquement, si la fonction $\phi = \phi - f$ est une solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 3y' + 2y = 0$, alors

$$(\phi - f)'' + 3(\phi - f)' + 2(\phi - f) = 0$$

$$\phi'' - f'' + 3\phi' - 3f' + 2\phi - 2f = 0$$

$$\phi'' + 3\phi' + 2\phi - (f'' + 3f' + 2f) = 0$$

$$\phi'' + 3\phi' + 2\phi = f'' + 3f' + 2f = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$$

Il en résulte que $\phi = \phi - f$ est solution de l'équation (E).

• L'équation caractéristique de (E') est $r^2 + 3r + 2 = 0$.

Cette équation admet deux solutions réelles -2 et -1 .

Les fonctions ϕ solutions de (E') sont de la forme

$$x \mapsto C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}, \quad \text{où } C_1 \in \mathbb{R} \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}.$$

• D'après les résultats précédents, on en déduit que les fonctions ϕ solutions de l'équation (E) sont de la forme

$$\phi(x) = \phi(x) + f(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{\ln x}{e^x},$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ et $C_2 \in \mathbb{R}$.

.....