

Documents non autorisés

L.E. Chaque exercice sera noté sur 4

EXERCICE N°1

1°- Résoudre dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation
$$Z^2 - (3 + i)Z + 4 = 0.$$

Déterminer le module et l'argument de ses racines.

2°- Soit l'équation (E) dans $\mathbb{C}$

$$(E) : Z^3 - (5 + i)Z^2 + 2(5 + i)Z - 8 = 0$$

a)- Montrer que cette équation admet une racine réelle que l'on déterminera.

b)- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

EXERCICE N°2

1°- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels). Montrer que si f est dérivable au point x_0 , alors f est continue en ce point. (La réciproque en générale n'est pas vraie).

2°- Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes

au point 0 a) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ où e^x désigne la fonction

exponentielle de base e . b) $g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

EXERCICE N°3

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$f(x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1°- Quel est le domaine de définition de f ?

2°- Montrer que f est une fonction impaire

3°- Etudier les variations de f

4°- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal

$(O, \vec{i}, \vec{j})$. Préciser les branches infinies.

5°- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} . Déterminer f^{-1}
(suite au verso)

EXERCICE N°4

1 - Déterminer les primitives des fonctions suivantes:

$$a) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}, \quad b) g(x) = (3x^2 + 4) \cdot e^{-x}$$

2 - Calculer les intégrales suivantes

$$a) I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - 3 \cos x \cdot \sin x) dx, \quad b) I_2 = \int_1^a \cos(\ln x) dx \quad (a > 0)$$

EXERCICE N°5

Soit $R_2[X] = \{ p(X) = aX^2 + bX + c ; a, b, c \in R \}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2 et du polynôme zéro. On sait que $R_2[X]$, muni de l'addition (opération interne):

pour $p(X) = aX^2 + bX + c$ et $q(X) = a'X^2 + b'X + c'$ éléments de $R_2[X]$

$$p(X) + q(X) = (a+a')X^2 + (b+b')X + (c+c'),$$

et de la multiplication par un scalaire $\alpha \in R$ (opération externe)

$$\alpha \cdot p(X) = \alpha \cdot aX^2 + \alpha \cdot bX + \alpha \cdot c$$

est un espace vectoriel sur R .

1° - Soit A le sous-espace engendré par $\{X^2 - 3X + 2, 2X^2 + 1\}$ et B le sous-espace engendré par $\{X^2 + X - 1, X^2 - X\}$. Donner une base de $A \cap B$.

2° - Pour λ et μ éléments de R et $p(X)$ élément de $R_2[X]$, soit $f_{\lambda, \mu}$ l'application de $R_2[X]$ dans lui-même définie par:

$$f_{\lambda, \mu}(p(X)) = (X^2 - \lambda)p''(X) + (\mu X - 1)p'(X)$$

où $p'(X)$ et $p''(X)$ sont les dérivées première et seconde de $p(X)$.

a) - Montrer que $f_{\lambda, \mu}$ est un endomorphisme de $R_2[X]$.

b) - Quel est son noyau?

c) - Est-ce que $f_{\lambda, \mu}$ peut-il être un automorphisme?

EXERCICE 1 :

- a) Trouver les racines quatrièmes de -4 sous la forme algébrique dans $\mathbb{C}$.
 b) Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \text{ et } z_2 = 1 + i$$

En déduire le module et l'argument de $z_0 = \frac{z_1}{z_2}$. Utiliser ces résultats pour calculer $\cos$

$$\frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12}.$$

- c) x étant un réel quelconque et n un entier naturel, en considérant l'expression de $U + iV$ calculer les réels U et V définis par :

$$U = 1 + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos 2x + \dots + C_n^n \cos nx$$

$$V = C_n^1 \sin x + C_n^2 \sin 2x + \dots + C_n^n \sin nx$$

Quel est l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$\bar{z}z + 3z + 3\bar{z} - 7 = 0 ?$$

EXERCICE 2 :

- a) Montrer que dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{F}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les 3 vecteurs $f_1 = 1$, $f_2 = \sin x$, $f_3 = \cos x$ sont linéairement indépendants.
 b) On note ξ l'espace vectoriel engendré par f_1, f_2, f_3 . Si $a \in \mathbb{R}$ et si $f \in \xi$, on note $l_a(f)$ la fonction (qui appartient à ξ) définie par : $[l_a(f)](x) = f(x + a) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 Montrer que l'application $l_a : f \mapsto l_a(f)$ est linéaire sur ξ
 Ecrire dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ la matrice de M_a de l_a .
 c) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Calculer $l_{\beta} \circ l_{\beta}$. vérifier matriciellement le résultat.

EXERCICE 3 :

- I. On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_1 = a, U_2 = b, U_3 = \frac{1}{2}(U_1 + U_2), \dots, U_n = \frac{1}{2}(U_{n-2} + U_{n-1}), \dots, a, b \in \mathbb{R}$$

- a) Démontrer que la suite de terme général $V_n = U_n + U_{n-1}$ est une suite géométrique.
 b) En déduire l'expression de U_n en fonction de a, b, n , puis la limite de (U_n) quand n tend vers l'infini.

- II a) Annoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
- b) Peut-on appliquer ce théorème à la fonction népérien sur le segment $[p, p+1]$ où $p \in \mathbb{N}$?
- c) En déduire la limite de la suite (W_n) définie par : $W_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 4 :

a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin^3 x}$

b) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{Log} x & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$.

c) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{|\operatorname{Log} x|}{x}$

Etudier g et tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormé.

Calculer l'aire S du domaine limité par (C) , l'axe Ox et les parallèles à Oy d'équation

$x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.

EXERCICE 1 :

soit la fonction définie par $f(x) = x \operatorname{Log} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

a°) Donner son domaine de définition et montrer qu'on peut la prolonger par continuité en $x = 0$

b°) On restreint alors la fonction sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Etudier les variations de cette fonction.

N.B. : On étudiera les variations de cette fonction.

c°) Montrer que la fonction admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation de la droite asymptote.

d°) Résoudre l'équation $f(x) - x = 0$

e°) Enoncer le théorème des accroissements finis.

f°) Dédurre de d°) et de e°) qu'il existe une valeur de x tel que $f'(x) = 1$

g°) Tracer la courbe de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$

h°) Calculer l'aire S limité par la fonction $f(x)$ et la fonction $y = x$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{e-1}\right]$

EXERCICE 2 :

On se donne une fonction linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathbb{R}^3$ soit un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. La fonction f est définie sur la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ dans $\mathbb{R}_3$ par :

$$f(e_1) = me_1 + 2e_2 + me_3$$

$$f(e_2) = e_1 + 2e_2 + me_3$$

$$f(e_3) = me_1 + me_2 + 3e_3$$

avec $m \in \mathbb{R}$

a°) Ecrire la matrice de f

b°) Discuter suivant les valeurs de m la dimension du noyau de f et la dimension de l'image de f

c°) Soit le vecteur B de coordonnées $(m+2, 2m+3, 5)$

1. Pour quelles valeurs de m la fonction est-elle bijective

2. Dans le cas de bijection, trouver l'antécédent X tel que $f(x) = B$. On écrira le système linéaire pour calculer les coordonnées de X .

EXERCICE 3 :

Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ ($0 \leq \theta \leq \pi$). On pose : $z' = \frac{(z+1)(z-1)}{z^2}$

- 1) Vérifier que $\bar{z} = \frac{1}{z}$
- 2) Ecrire $\bar{z}'$ en fonction de z
- 3) Déterminer les complexes z de module 1 pour lequel z' est un nombre réel non nul
- 4) a – Vérifier que $\bar{z}$ est une racine carrée de $1 - z'$
b – Ecrire z' sous forme algébrique
c – Déterminer, en fonction de θ , le module et l'argument de z'
d – z' peut-il être un imaginaire pur.

EXERCICE 4 :

On se donne la suite réelle u_n définie par : $U_n = \sqrt[n]{n}$

- 1°) a – On posera $u_n = 1 + v_n$ où v_n est une suite positive qu'on admettra.

En remarquant que $n = (1 + v_n)^n$, montrer que $v_n^2 < \frac{2}{n-1}$

b – Dédurre la limite de u_n .

- 2°) Soit la suite réelle u_n définie par : $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$

Encadrer judicieusement u_n et en déduire la nature de la suite.

EXERCICE N° 1 : On donne les nombres complexes $A = 2 - i$, $B = 17 + 3i$.

$C = 15 - 5i$, $D = \frac{1+x+iy}{1-x-iy}$. On désigne par M un point du plan P dont

l'affixe est $x + iy$.

- 1°) Ecrire D sous la forme $a + ib$.
- 2°) Déterminer l'ensemble des points M tels que D soit un nombre réel.
- 3°) Déterminer l'ensemble des points M tels que D soit un imaginaire pur.
- 4°) Calculer $K = \frac{A \cdot B}{C}$ et déterminer les racines carrées, dans $\mathbb{C}$, du nombre K.

EXERCICE N° 2 : Trois suites U , V , et W sont définies de la manière suivantes sur $\mathbb{N}^*$:

$$U \begin{cases} u_1 = 1 \\ n > 1 : u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases} \quad V \begin{cases} v_1 = 12 \\ n > 1 : v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

$$W : w_n = u_n - v_n, \quad \forall n.$$

- 1°) Montrer que W est une suite géométrique convergente à termes négatifs.
- 2°) Montrer que U est croissante et que V est décroissante.
- 3°) Montrer que $1 \leq u_n < v_n \leq 12$, pour tout n . Les suites U et V sont-elles convergentes ?
- 4°) On considère la suite t définie, pour tout n , par : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
 - Montrer que t est constante.
- 5°) Montrer que U et V ont la même limite. Trouver cette limite.

SUITE AU VERSO.

EXERCICE N° 3 : Soit f la fonction telle que $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et g

l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$g(x) = \begin{cases} -x+1+2\text{Log}x & \text{si } x \in]0, 1[\\ x-2+e^{1-x} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

- 1°) Montrer que pour tout réel x : $|f(x)| < 1$ et que f est impaire.
- 2°) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
- 3°) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. Déterminer f^{-1} .
- 4°) Montrer que g est continue sur $]0, +\infty[$.
- 5°) Montrer que f est dérivable à gauche et dérivable à droite au point $x = 1$. L'application g est-elle dérivable en ce point ?

EXERCICE N° 4 : Voici trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{u} = (1, -1, 1, -1) \quad ; \quad \vec{v} = (1, 1, -1, -1) \quad ; \quad \vec{w} = (1, -1, -1, 1)$$

- 1°) Donner la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
- 2°) La famille $F = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ avec $\vec{t} = (-1, -1, -1, 3)$. C'est-elle une famille libre ? Est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

DOCUMENTS NON AUTORISÉS Y COMPRIS LES CALCULATRICES

EXERCICE I

Première Partie

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F .

Pour tout sous-ensemble A de E on désigne par $f(A)$ l'ensemble $\{y = f(x) \in F; x \in A\}$.

1° Montrer que si $A \subset E$ et si $B \subset E$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et qu'en général $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

2° Démontrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour tous sous-ensembles A et B de E si et seulement si f est une application injective.

Deuxième Partie

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite numérique définie par la relation de récurrence :

$$u_1 = \sqrt{2}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad (n \geq 1)$$

1° Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante.

2° Montrer que $u_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$, quel que soit $n \geq 1$.

EXERCICE II

Première Partie

Soit $a \in \mathbb{C}$, considérons l'équation dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$

$$E : (z + a)^n = z^n \quad (n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C})$$

1° Résoudre l'équation (E).

2° Montrer que si $a \in \mathbb{R}^*$, i.e. si a est un réel non nul, les racines de l'équation (E) décrivent une droite parallèle à l'axe des nombres imaginaires purs.

(suite au verso)

Deuxième Partie

Soient $z \in \mathbb{C}$, $|z| = r$, $\arg z = t$, $0 \leq t < 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(t) = 1 + r \cos t + r^2 \cos 2t + \dots + r^n \cos nt$$

$$v_n(t) = r \sin t + r^2 \sin 2t + \dots + r^n \sin nt$$

1° Calculer $u_n(t)$ et $v_n(t)$ pour $r \neq 1$

2° Soit $r = 1$, montrer que

$$a) \quad u_n(t) = \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2} \cdot \cos \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}, \quad v_n(t) = \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2} \cdot \sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}, \quad \text{si } t \neq 0.$$

$$b) \quad \lim_{t \rightarrow 0} u_n(t) = u_n(0), \quad \lim_{t \rightarrow 0} v_n(t) = v_n(0).$$

3° On pose $r = \frac{1}{2}$ et on considère la fonction périodique de période 2π définie pour tout $t \in [0, 2\pi[$ par $f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t)$.

Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

EXERCICE III

f étant une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ et g la fonction primitive de f qui s'annule

pour $x = 0$, $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1° Quel est le domaine de définition de f et en quels points f est-elle dérivable ?

2° Quel est le domaine de définition de g ?

3° Montrer que g est une fonction impaire.

4° Montrer que g est bijective.

5° Calculer $g\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$ et en déduire $g^{-1}(x)$ (la fonction réciproque de g).

N.B. : On répond aux questions 2°, 3°, 4°, 5° sans calculer la fonction primitive $g(x)$.

1. PROBLEME :

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par : $f(x) = 2 \operatorname{Ln} \left[\frac{e}{4} \left(x + \frac{4}{x} \right) \right]$ où

Ln désigne le logarithme népérien de base e .

Partie 1 : Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1) - Etudier les variations de f . Montrer que la courbe (Γ) d'équation $y = 2 \operatorname{Ln} \left[\frac{ex}{4} \right]$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

2) - Tracer (C) et (Γ) sur la même figure.

3) - Etudier le signe de $g(x) = f(x) - x$ et démontrer que pour tout $x \geq 2$, on a $f(x) \leq x$.

Partie 2 : On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 > 0$ et

$$U_{n+1} = f(U_n) = 2 \operatorname{Ln} \left[\frac{e}{4} \left(x + \frac{4}{x} \right) \right], \forall n \in \mathbb{N}.$$

1) - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n \geq 2$ et que (U_n) est une suite décroissante à partir du rang 1.

2) - Soit φ_1 la fonction numérique d'une variable réelle x définie par $\varphi_1(x) = \operatorname{Ln}(1+x) - x$.

a) Démontrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\operatorname{Ln}(1+x) \leq x$.

b) En déduire que pour tout $h \geq 0$, on a

$$0 \leq f(2+h) - 2 \leq \frac{h^2}{2(2+h)} \leq \frac{h^2}{4}$$

3) - On pose $V_n = U_n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq V_{n+1} \leq \frac{V_n^2}{4}$$

Partie 3 :

1) - Soit φ_2 la fonction numérique à variable réelle x définie par :

$$\varphi_2(x) = \operatorname{Ln}(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

Etudier le signe de φ_2 sur l'intervalle $] -1, +\infty [$.

2) - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est la fonction définie sur l'intervalle $] -1, +\infty [$ par :

$$\varphi_n(x) = \operatorname{Ln}(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n}$$

Etudier le signe de $\varphi_n(x)$ pour $x \in] -1, +\infty [$.

Suite au verso...

Partie 4 : On considère l'application h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 4}$

1)- a / Trouver trois constantes réelles a, b, c telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$h(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 4}$$

b/ Déterminer une primitive H de h .

2)- Soit α un nombre réel supérieur à 2. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer en fonction de α l'intégrale suivante :

$$I(\alpha) = \int_2^\alpha 2x \ln \left[\frac{e}{4} \left(x + \frac{4}{x} \right) \right] dx$$

2. EXERCICE :

Soient ABC un triangle isocèle et BCDE un rectangle. On donne $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm et $CD = 3$ cm.

Soit O la projection orthogonale du point A sur le segment $[BC]$.

On considère un point M du segment $[AO]$ tel que $AM = x$.

On note N le projeté du point M sur la droite (BC) parallèlement à la droite (AC) . On note P le symétrique du point N par rapport à la droite (AO) .

1)- Construire une figure

2)- Calculer AO , MO , ON et vérifier que $MN = \frac{5}{4}(4 - x)$

3)- Calculer $A(x)$ l'aire du quadrilatère $AMNC$ en fonction de x .

4)- Soit $B(x)$ l'aire du domaine limité par $ABEDC$, extérieur au triangle MNP . Exprimer $B(x)$ en fonction de x .

Partie A :

Exercice I :

1) Démontrer que :

$P(z) = z^2 + (1-2i)z + 1$ ($z \in \mathbb{C}$), est le produit de deux polynômes du 1^{er} degré.

On considère sur $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$t^2 - 3zt + 2z^2 + iz + 1 = 0$$

Où t est l'inconnue et z paramètre complexe.

- Déterminer les deux solutions de (E) dans le cas général.
- Déterminer l'ensemble z pour que lui-même soit solution de (E).

Partie B :

Exercice II :

On rappelle que : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

1)- Démontrer que :

$$C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$$

2)- On admet que :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n$$

a) Calculer :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

b) Montrer que :

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5$$

c) Montrer que :

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$$

3)- Démontrer, d'après le principe raisonnement par récurrence que :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Partie C :

Exercice III :

Soit la fonction d'une variable réelle définie par :

2- Soit la fonction g définie sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \text{Log}(\sin x + \cos x)$

b)-On pose $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

Calculer $I+J$ et $I-J$. En déduire la valeur de I et celle de J .

Exercice 4 :

1- Soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow g(x) = (1-x)e^x - 1$$

Donner l'expression de la dérivée $g'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction

En déduire le signe de $g(x)$.

2- Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = (2-x)e^x - 2 - x$

a) A l'aide des résultats obtenus en 1, déduire les variations de la fonction f .

b) Montrer que la courbe représentative (C) de cette fonction f admet pour asymptote oblique la droite d'équation $y = 2 - x$. Préciser la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) .

c) Déterminer le point K de la courbe (C) en laquelle la tangente est parallèle à (D) .

d) Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé. Préciser les coordonnées des points d'intersection A et B de la courbe (C) avec les axes.

Tous les exercices sont obligatoires.

Exercice 1:

1.- z étant un nombre complexe, on pose $A = \frac{1+z}{1-z}$

On désigne par M un point du plan dont l'affixe est z .

a).- Déterminer l'ensemble des points M tel que A soit un nombre réel.

b).- Déterminer l'ensemble des points M tel que A soit imaginaire pur.

2.- Le nombre complexe u s'écrit : $u = \frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$

a).- Ecrire u sous forme trigonométrique.

b).- Calculer u^4 .

3.- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $6z^2 - (5-i)z + 2 - \frac{5i}{6} = 0$

4.- Calculer la somme suivante, où n est un entier naturel : $S = \sum_{k=0}^n \cos k\theta$

Exercice 2:

1.- La suite (u_n) est définie de la manière suivante : $u_0 = 1, u_1 = 3$; $n > 1$: $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$

a).- Calculer u_2, u_3, u_4 . Démontrer que, pour tout n : $u_n = 2^{n+1} - 1$.

La suite (u_n) est-elle convergente ?

b).- La suite (v_n) est définie par : $v_n = u_n - 2u_{n-1}$

Démontrer que (v_n) est constante. En déduire une relation entre u_n et u_{n-1} .

c).- Peut-on trouver des suites géométriques (s_n) vérifiant, pour tout $n > 1$: $s_n = 3s_{n-1} - 2s_{n-2}$?

2.- La suite (w_n) est définie pour $w_0 = a, w_1 = b$ et pour tout n supérieur à 1, par : $w_{n+1} = w_n - w_{n-1}$.

Démontrer que (w_n) est périodique.

3.- Trois réels x, y, z forment dans cet ordre une suite arithmétique dont la somme est 9 ; $\frac{1}{x}, \frac{2}{y}$ et $\frac{3}{z}$

forment dans cet ordre une suite géométrique. Calculer x, y et z .

Exercice 3:

1.- Soit f l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 + 2\text{Log } x & \text{si } x \in]0, 1[\\ x - 2 + e^{1-x} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

a).- Montrer que f est continue au point $x = 1$. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

b).- Montrer que f est dérivable à gauche et dérivable à droite au point $x = 1$. L'application f est-elle dérivable en ce point ?

2.- Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = \text{Log}(\sin x + \cos x)$

a).- Calculer la dérivée de g .

b). - On pose $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

Calculer $I + J$ et $I - J$. En déduire la valeur de I et celle de J .

Exercice 4:

1.- Soit la fonction $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$

$$x \longrightarrow g(x) = (1 - x)e^x - 1$$

Donner l'expression de la dérivée $g'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction g .

En déduire le signe de $g(x)$.

2.- Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = (2 - x)e^x + 2 - x$

a).- A l'aide des résultats obtenus en 1.-, déduire les variations de la fonction f .

b).- Montrer que la courbe représentative (C) de cette fonction f admet pour asymptote oblique la droite d'équation $y = 2 - x$. Préciser la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

c).- Déterminer le point K de la courbe (C) en laquelle la tangente est parallèle à (D).

d).- Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé. Préciser les coordonnées des points d'intersection A et B de la courbe (C) avec les axes.

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE

EXERCICE I :

Les deux parties A et B sont indépendantes et obligatoires.

Partie A

On considère la suite réelle (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$$

pour $\forall n \in \mathbb{N}$

1° Montrer que, par récurrence sur ' n ', la suite (U_n) est majorée par un nombre ' h ' qu'on déterminera.

2° Démontrer que (U_n) est strictement croissante :

- a) en raisonnant par récurrence
- b) en étudiant le signe de la différence $(U_{n+1} - U_n)$.

Que peut-on en déduire ?

3° On construit une nouvelle suite (V_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 2 - U_n$$

- a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} \leq \frac{1}{2} V_n$
- b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- c) Vérifier que le résultat de $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ satisfait la déduction de la question 2°

4° Déterminer directement la limite de la suite (U_n)

Partie B

Pour chacune des suites suivantes, explicitez dans chaque cas le terme général U_n en fonction de n , $n \in \mathbb{N}$.

- a) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = \frac{1}{3} U_{n-1} \end{cases}$
- b) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 10U_n - 8 - 9n \end{cases}$
- c) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{U_n^2 + 1}} \end{cases}$

EXERCICE II :

Les deux parties A et B sont indépendantes et obligatoires.

Partie A

Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - x}$

1° Etudier la variation de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0]$; montrer que f_1 est une bijection de cet intervalle sur un intervalle I que l'on précisera. Soit $g = f_1^{-1}$ la bijection réciproque de f_1 ; construire la courbe (C_1) représentative de g dans le même repère que (C) .

3° Déterminer :

$$g(x), \forall x \in I$$

et calculer l'aire géométrique de la partie du plan définie par :

$$\left\{ -1 \leq x \leq -\frac{1}{e^2} \right\} \text{ et } \left\{ g(x) \leq y \leq \frac{x}{2} + 1 \right\}$$

Partie B

1° Calculer l'aire d'un disque de rayon égal à $\frac{1}{2}$.

2° On considère la fonction définie, pour tout x de $[0; 1]$, par :

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)}$$

Etudiez les variations de $f(x)$ (on admettra que $f(x)$ n'est pas dérivable en 0 et en 1).

3° Soit (C) la courbe représentative de $f(x)$ dans un repère orthonormal.

a) Soit M le point d'abscisse x de (C) et I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, calculer $\overline{IM}^2$.

b) Prouvez que (C) est un demi-cercle dont on précisera le centre et le rayon. Tracez ce demi-cercle.

4° a) Donnez une interprétation géométrique de l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$

b) En déduire la valeur de cette intégrale

EXERCICE III

Les trois questions suivantes sont indépendantes et obligatoires.

1° Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes le système :

$$\begin{cases} (1+i)z - (2-3i)z' = 4+3i \\ (2-3i)\bar{z} + (4-2i)\bar{z}' = 3-4i \end{cases}$$

où les inconnus sont z et z' ; $\bar{z}$ et $\bar{z}'$ sont les conjugués de z et z' .

2° Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation :

$$z^2 + (2+4i)z + 3-4i = 0$$

3° Soit la transformation ponctuelle S du plan tel que $S(M) = M'$ où M et M' ont respectivement pour affixes z et z' telles que :

$$z' = (1+i)z + 3-2i$$

a) Donner les éléments caractéristiques de S

b) En déduire les éléments caractéristiques de S^{-1} et S^n .

c) Déterminer l'image par S :

- de la 1^{ère} bissectrice
- du cercle trigonométrique

Exercice n°1 (8 points)

Partie A

Soit f une application du corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ dans lui-même

$$f(z) = \frac{z + i}{i - z}$$

1° Trouver deux nombres complexes a et b tels que :

$$f(z) = a + \frac{b}{z - i} \quad (1 \text{ point})$$

2° Soient E l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z| = 1$, E_1 l'image de E par l'application $z_1 = f_1(z) = z - i$, E_2 l'image de E_1 par l'application

$$z_2 = f_2(z_1) = \frac{1}{z_1}, \quad E_3 \text{ l'image de } E_2 \text{ par l'application } z_3 = f_3(z_2) = b \cdot z_2, \quad E_4$$

l'image de E_3 par l'application $z_4 = f_4(z_3) = a + z_3$.

Déterminer les ensembles E_1, E_2, E_3, E_4 et tracer leurs courbes représentatives dans le plan complexe. (2 points)

Partie B

1° Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation $z^4 - 1 = 0$ et en déduire les solutions de l'équation $[(\sqrt{3} - i)z + 1]^4 = 1$. (2 points)

2° Soit $a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$. Calculer a^4 . (1 point)

3° Déterminer la forme trigonométrique puis la forme algébrique des nombres complexes solutions de l'équation $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$. (2 points)

Exercice N°2 (12 points)

Dans cet exercice on désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbf{Q}$ le corps des nombres rationnels, par $\mathbf{Z}$ l'ensemble des nombres entiers, par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

On suppose qu'il existe une fonction continue unique f définie sur $\mathbf{R}$, vérifiant les conditions a) et b) suivantes :

- a) $\forall x \in \mathbf{R} \text{ et } \forall y \in \mathbf{R} \quad f(x + y) + (x + y) = (f(x) + x)(f(y) + y)$.
b) $f(1) = e - 1$ (e : base des logarithmes népériens).

(suite au verso $\Rightarrow$)

1° Montrer que :

(1) $(\forall t \in \mathbf{R}) (f(t) + t \geq 0)$ (1 point)

(2) $(\forall t \in \mathbf{R}) (f(t) + t \neq 0)$ et que $f(0) = 1$. (1 point)

2° Montrer que :

(3) $(\forall x \in \mathbf{R})$ et $(\forall n \in \mathbf{N}) \quad f(nx) + nx = (f(x) + x)^n$ (0.5 point)

Posant $y = -x$ dans a), calculer $f(-x) - x$ et établir que (3) reste vérifiée $(\forall x \in \mathbf{R})$ et $(\forall n \in \mathbf{Z})$ (0.5 point)

3° Calculer, en fonction du nombre e et du nombre entier n , l'expression $f(n) + n$

puis $f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$. (1 point)

En déduire que :

(4) $(\forall r \in \mathbf{Q}) (f(r) = e^r - r)$. (1 point)

4° On admet que tout nombre réel x est limite d'une suite de nombres rationnels $(r_n)_{n \geq 0}$, $(r_n \in \mathbf{Q})$, c'est à dire

$$(\forall x \in \mathbf{R}) (\exists (r_n)_{n \geq 0} \subset \mathbf{Q}) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$$

a) Montrer que $(\forall x \in \mathbf{R}) (f(x) = e^x - x)$. (1 point)

Etudier et représenter graphiquement les variations de f , en soignant particulièrement l'étude des branches infinies. Que peut-on dire de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = 1$. (2 points)

b) Evaluer l'aire, $A(b)$, de la portion du plan comprise entre la courbe, son asymptote et les droites d'équations $x = 0$, $x = b$ ($b < 0$) et trouver la limite de $A(b)$, lorsque b tend vers $-\infty$. (1 point)

5° a) Montrer que l'on a :

(5) $(\forall x \in \mathbf{R}) (e^x \geq 1 + x)$ (1 point)

b) On pose :

$$\ln(U_0) = 0, \ln(U_n) = \ln(1 + a) + \ln(1 + a^2) + \dots + \ln(1 + a^n), (n > 0),$$

avec $0 < a < 1$ et $\ln$ le logarithme népérien.

Montrer que $(U_n)_{n \geq 0}$ est une suite convergente. (2 points)

UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE

.....
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE
Documents non autorisés

Année universitaire 2004-2005
SESSION DU 02-03 NOVEMBRE 2004
Options : **TOUTES**
Matière : **MATHEMATIQUES**
Durée : **03 heures**

N.B. On tiendra compte d'une bonne présentation et d'une bonne rédaction de toutes les démonstrations. (2 points)

Exercice (sur 6 points)

Soit la famille d'équations

$$(E_\theta): z^2 - (1 + i \sin 2\theta)z + \frac{i}{2} \sin 2\theta = 0,$$

dans laquelle θ désigne un réel appartenant à l'intervalle semi-ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

A tout complexe $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées (x, y) dans le plan.

1° Résoudre l'équation (E_θ) dans l'ensemble des nombres complexes. (2 points)

2° Soient $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ les points du plan associés aux solutions $z'(\theta)$ et $z''(\theta)$ de l'équation (E_θ) et soit $I(\theta)$ le milieu du segment $[M'(\theta), M''(\theta)]$.

a) Déterminer l'ensemble des points $I(\theta)$ lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. (1 point)

b) Montrer que l'ensemble des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ est un cercle C que l'on précisera. (1 point)

c) Démontrer, lorsque $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ sont distincts, que la droite contenant ces deux points a une direction indépendante de θ . (1 point)

d) On pose $\theta = \frac{\pi}{6}$, déduire de ce qui précède une construction simple de $I(\theta)$ et des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$. (1 point)

Problème (sur 12 points)

Partie A

1° Soient g_1 une application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$: $g_1(x) = 2x^3 + 1 - 3\text{Log } x$,
 g_2 une application de $]-\infty, 0[$ dans $\mathbf{R}$: $g_2(x) = x^2 + 1 - 2\text{Log } |x|$,

où $\text{Log } x$ désigne le logarithme népérien de x .

Etudier les sens de variation de g_1 et de g_2 .

(1.5 points)

(suite au verso $\Rightarrow$)

2° Soient h_1 une application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$: $h_1(x) = \left(2 + \frac{1}{x^3}\right) \text{Log } x$,

h_2 une application de $]-\infty, 0[$ dans $\mathbb{R}$: $h_2(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \text{Log } |x|$

Etudier les sens de variation de h_1 et de h_2 .

(1.5 points)

Partie B

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = e^{h_1(x)} \text{ si } x > 0, \quad f(0) = 0, \quad f(x) = e^{h_2(x)} \text{ si } x < 0,$$

où e est la base des logarithmes népériens.

Handwritten notes:
 $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x^3}}$ si $x > 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = -x e^{\frac{1}{x^2}}$ si $x < 0$

1° La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

(1 point)

2° La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

(1 point)

3° Calculer $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

(1 point)

4° Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^2}{\text{Log } x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + x}{\text{Log } |x|}$.

(1 point)

5° En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x^2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x$, puis étudier les branches infinies

(1.5 points)

6° Etudier le signe de $f(x) - x^2$ pour $x \geq 0$ et de $f(x) + x$ pour $x \leq 0$.

(1.5 points)

7° Etudier le sens de variation de f . Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On précisera sa position par rapport aux asymptotes et l'on indiquera la tangente au point 0.

(2 points)

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE INGENIORAT

— oOo —

Session du 08 au 09 novembre 2005

EXERCICE

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$. On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.

2) a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2 .

b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$.

3) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité = 1 cm), on considère le point P_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, le point P_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et le point P d'affixe $z_P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Déterminer l'affixe du point P_3 , image de P_2 par l'homothétie H de centre P et de rapport -3 .

b) Déterminer l'affixe du point P_4 , image de P_2 par la rotation R de centre O et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Placer dans le même repère les points P , P_1 , P_2 , P_3 et P_4 .

d) Calculer $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.

e) Soient I le milieu du segment $[P_3, P_4]$ et P_5 le symétrique de P_1 par rapport à I .
Montrer que les points P_1 , P_3 , P_5 et P_4 forment un carré.

PROBLEME Les trois parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A: On se propose d'étudier dans cette partie les fonctions

$T_n(x) = \cos n\theta$ où $x = \cos \theta$ et $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout n , on a la relation $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

2) Vérifier que la suite des nombres $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$, où $k=1, 2, \dots, n$, sont racines simples des équations $T_n(x) = 0$.

3) a) Pour $n=3$, déterminer les trois valeurs de la suite x_k correspondante.

b) En utilisant la formule du binôme, montrer que

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^n C_n^k (i\sqrt{1-x^2})^k x^{n-k} \text{ avec } k \text{ pair.}$$

4) En déduire ainsi que les fonctions $T_n(x) = \cos n\theta$ sont des fonctions polynômiales de degré n et à coefficients du plus haut degré égal à 1 que l'on déterminera.

5) Déterminer en fonction de x les trois fonctions suivantes: $T_0(x)$, $T_1(x)$ et $T_2(x)$.

Partie B: Soient $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ et $g(x) = \frac{2}{3}(\sqrt{7} - 2)x^2 + 1$ deux fonctions à variable réelle définies sur $\mathbb{R}$. On se propose, dans cette partie, de résoudre l'équation

$$\sqrt{x^2 + 1} - \frac{2}{3}(\sqrt{7} - 2)x^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

- 1) Montrer que f est une fonction bijective sur $[0, +\infty[$ et déterminer sa fonction réciproque f^{-1} .
- 2) Etudier les fonctions f et g et tracer sur un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ respectives de f et de g .
On donne $\sqrt{2} \approx 1,414$ $\sqrt{5} \approx 2,236$ $\sqrt{7} \approx 2,645$
- 3) En déduire à l'aide de la lecture graphique les valeurs approximatives des solutions de l'équation (1).
- 4) Calculer en fonction de x les dérivées successives jusqu'à l'ordre 4 de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Partie C: Dans cette partie, on considère une fonction $h(x)$ définie sur le segment $[-\pi, \pi]$ continue et ayant ses dérivées jusqu'à l'ordre m -ième continues et qui vérifie la relation $h^{(k)}(-\pi) = h^{(k)}(\pi)$ pour tout $0 \leq k \leq m$.

Considérons la suite de nombres $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos nx \, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que l'on a la relation $a_n = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} h'(x) \cos \left(\frac{\pi}{2} + nx \right) dx$.
 - 2) En déduire que pour tout m , on a aussi $a_n = \frac{1}{\pi n^m} \int_{-\pi}^{\pi} h^{(m)}(x) \cos \left(\frac{\pi}{2} m + nx \right) dx$
-

Exercice 1

- 1) On considère le nombre complexe :

$$a = -1 + i$$

Calculer le module et l'argument de a , de $\frac{1}{a}$, de a^2

- 2) Déterminer les racines carrées du nombre complexe :

$$b = 5 - 12i$$

- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - (5 - 4i)z + 3(1 - 3i) = 0$$

Exercice 2

On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : 2u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

- 1) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_{n+1} - u_n$

a) En écrivant : $2(u_{n+2} - u_{n+1})$ en fonction de $u_{n+1} - u_n$, montrer que v_{n+1} et v_n sont du même signe que l'on précisera. En déduire le sens de variation de (u_n)

b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison q

c) Calculer $S_n = \sum_{p=0}^n v_p$, puis $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

d) Montrer que $S_n = u_{n+1} - u_0$. En déduire $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

- 2) Montrer qu'il existe une suite géométrique (w_n) telle que $(u_n - w_n)$ soit indépendante de n .

Exprimer u_n en fonction de n , puis retrouver ℓ .

(suite au verso)

Exercice 3

Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les fonctions f de $[0, 2\pi]$

dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(\sin \frac{x}{2}\right)^2$ et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$.

On note (C) la courbe de f .

- 1) f est-elle périodique ? Si oui, déterminer sa période T
- 2) f est-elle paire ?
- 3) Montrer que (C) admet la droite (D) d'équation $x = \pi$ pour axe de symétrie
- 4) Donner le tableau de variation de g et montrer que g possède une fonction réciproque h .

Préciser le domaine de définition de h et exprimer $h(x)$ en fonction de x

Exercice 4

Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne la fonction φ

de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x + 1 + 2 \ln x & \text{pour } 0 < x < 1 \\ x - 2 + e^{-x+1} & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que φ est continue et dérivable en tout point x strictement positif et différent de 1.
- 2) En $x_0 = 1$, φ est-elle continue ? est-elle dérivable ?
- 3) Etudier les variations de φ et tracer sa courbe représentative en précisant les asymptotes
- 4) Soit λ un réel supérieur à 2. Exprimer l'aire $A(\lambda)$ du domaine des points M vérifiant :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \lambda \\ 0 \leq y \\ x - 2 \leq y \leq \varphi(x) \end{cases}$$

- 5) Calculer $\alpha = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

Exercice n°1

- 1) Linéariser $\sin^3 x$ (0.5 pt)
- 2) Utiliser le résultat précédent pour calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x (1 + \sin x)^2 dx \quad (1 \text{ pt})$$

Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 5 cm).

Partie A

- 1) Démontrer que la droite d'équation $(\Delta) : y = 1$ est asymptote à (C) . (0,5pt)
- 2)
 - a) Pour $x > 0$, calculer $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ et étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0. (1 pt)
 - b) Que peut-on en déduire pour la fonction f ? (0,5pt)
 - c) Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ? (0,5pt)
- 3)
 - a) Pour tout x de $]0; +\infty[$, calculer la dérivée de f . (0,5 pt)
 - b) Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f . (1pt)
 - c) Tracer la courbe représentative de f . (0,5pt)

Partie B

On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$

- 1) Montrer que dans $]0; +\infty[$, les fonctions $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes. (1pt)
- 2) Démontrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle (1pt)
- 3) On pose $A = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$. Montrer que $A = f'(\alpha)$ (1pt)

Partie C

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$
 - a. Sans calculer explicitement u_n , déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ (0,5pt)
 - b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) (0,5pt)
- 2) Démontrer que la fonction h , définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$ (0,5pt)
- 3) Calculer u_n . Interpréter graphiquement le résultat (1pt)
- 4) La suite (u_n) est-elle convergente? (0,5pt)

Exercice n°3

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : 4z^3 - 2(1+3i)z^2 - (4+i)z - 1 + i = 0$$

a) Montrer que l'équation admet une racine imaginaire pure z_1 que l'on déterminera.

(1pt)

b) Résoudre l'équation (E). On notera z_2 la solution réelle et z_3 l'autre solution.

(1,5pt)

2) Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{2\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : pour tout $z \in \mathbb{C} - \{2\}$, $f(z) = \frac{2z-i}{2-z}$

a) On pose $z = x + iy$ et $f(z) = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y (1pt)

b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z pour que $f(z)$ soit imaginaire pur. (1pt)

3) Dans le plan complexe (P) , on considère l'application $S : M(z) \rightarrow M'(z')$ définie par : $z' = 2iz + 2 + i$

a) On note M_1 le point d'affixe z_1 et M_3 le point d'affixe z_3 . Vérifier que $S(M_1) = M_3$

(0,5pt)

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S . (1,5pt)

c) Déterminer l'ensemble (Γ') image de (Γ) par S . (0,5pt)

4) a) Déterminer l'ensemble (ζ) des points M d'affixe z tels que $|2z - i| = 1$ (1pt)

b) Quelle est l'image (ζ') par l'application S . (0,5pt)

Exercice I (6 points)

Soit P le polynôme à variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - (2 + 3i)z^2 + (-1 + 5i)z - 2i(1 + i)$$

1. a) Déterminer une racine réelle notée z_0 de l'équation $P(z) = 0$. (0,5 pt)
- b) Mettre $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$ où a et b sont des nombres complexes que l'on déterminera. (0,5 pt)
- c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres racines telles que $|z_1| < |z_2|$. (1 pt)

2. On pose $q = 1 + i$. On désigne par (U_n) la suite de premier terme $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = q U_n$ pour tout entier n .

- a) Vérifier que U_0, U_1 et U_2 sont racines de $P(z)$. (0,5 pt)
- b) Exprimer U_n en fonction de n et q . (0,5 pt)
- c) En déduire la forme trigonométrique de U_n . (1 pt)

3. On désigne par M_n le point d'affixe U_n .

- a) Démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, les trois points O, M_n et M_{n+4} sont alignés. (0,5 pt)
- b) Démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, le triangle $O M_n M_{n+2}$ est rectangle. (0,5 pt)

4. a) Déterminer les valeurs de n pour que U_n soit un réel positif. (0,5 pt)
- b) Déterminer les valeurs de n pour que U_n soit imaginaire pure. (0,5 pt)

Exercice II (4 points)

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'' - y' - 2y = e^{-x}(-6x + 8)$$

1. a) Vérifier que la fonction u définie dans $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{-x}(x^2 - 2x)$ est solution de (E). (0,5 pt)
- b) Montrer qu'une fonction numérique f est solution de (E) si et seulement si $f - u$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' - y' - 2y = 0$. (0,5 pt)
- c) Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E). (1 pt)
- d) Déterminer l'unique solution de E telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -3$. (0,5 pt)

2. On pose $I_\lambda = \int_0^{\lambda} (x-1)^2 e^{-x} dx$ où $\lambda > 0$.

- a) Par deux intégrations par parties successives, exprimer I_λ en fonction de λ .

Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_\lambda$. (1 pt)

- b) En déduire, en cm^2 , l'aire du domaine plan (D) ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \geq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm. (0,5 pt)

suite au verso...



Problème**(10 points)**

On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = |x \ln x| \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

La notation $\ln$ désigne le logarithme népérien de base e . On note par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5cm.

Partie I

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f . (1 pt)
2. Etudier les variations de f et la branche infinie de C . Dresser le tableau de variation de f . (1 pt)
3. a) Montrer que f réalise une bijection de $]1, e[$ vers un intervalle J que l'on déterminera. (0,5 pt)
b) Démontrer qu'il existe un réel unique α de $]1, e[$ tel que $f(\alpha) = \frac{1}{e}$ et un réel unique β de $]1, e[$ tel que $f(\beta) = 1$. (0,5 pt)
Donner pour α et β une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près. (0,5 pt)
4. Déterminer dans $\mathbb{R}^+$ le signe de $f(x) - x$. (0,5 pt)
5. Tracer le plus précisément possible la courbe C . (1 pt)

Partie II

Soit u_0 un réel positif ou nul. On considère la suite (u_n) définie par u_0 et par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pourra utiliser les résultats dans la partie I sur l'étude de la fonction f .

1. Pour quelles valeurs de u_0 , la suite (u_n) est-elle constante ? (0,5 pt)
2. Soit $u_0 \in]0, \frac{1}{e}[$, démontrer que
a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n < \frac{1}{e}$. (0,5 pt)
b) La suite (u_n) est croissante. (0,5 pt)

3. Soit $u_0 \in]\frac{1}{e}, 1[$, montrer que $u_1 \in]0, \frac{1}{e}[$. (0,5 pt)

En déduire que si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in \{0, \frac{1}{e}, e\}$ alors cette limite est égale à $\frac{1}{e}$. (0,5 pt)

4. Soit $u_0 > e$
a) Montrer que la suite (u_n) est croissante. (0,5 pt)
b) Montrer que pour tout $x \geq e$ on a $f'(x) \geq 2$. (0,5 pt)
c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que $u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$. (0,5 pt)
d) Montrer ensuite la relation $u_{n+1} \geq u_0 + (u_1 - u_0)(2^{n+1} - 1)$.
Déterminer la nature de la suite (u_n) . (1 pt)

CONCOURS d' ENTREE EN PREMIERE ANNEE (Ingénieurs)

Session :23 au 24 Février 2011

MATHEMATIQUES

Durée :Trois heures

Exercice 1

Le plan complexe étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$$

- 1) a) Montrer que $-i$ est solution de (E)
b) Résoudre (E) dans l'ensemble des nombres complexes
- 2) On appelle A, B, C et Ω les points d'affixes respectives $4 + i, 4 - i, -i$ et 2 .
Comparer $|z_A - z_\Omega|, |z_B - z_\Omega|, |z_C - z_\Omega|$ et en déduire que les points A, B, C appartiennent à un même cercle (Γ_1) dont on précisera le centre et le rayon R_1 .
- 3) A tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$$

- a) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle (Γ_1) , montrer que :
 $|z' - i| = 2\sqrt{5}$
- b) Déterminer les affixes des points A', B' et C' associés respectivement aux points A, B, C et vérifier que A', B' et C' appartiennent à un cercle (Γ_2) dont on déterminera le centre I et le rayon R_2 .

Exercice 2

Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les courbes H_1 et H_2 d'équations respectives :

$$H_1: y = \frac{1}{x} \text{ (avec } x > 0 \text{)} \text{ et } H_2: y = \frac{2}{x} \text{ (avec } x > 0 \text{)}$$

- a) Tracer H_1 et H_2
- b) On note D_2 le domaine délimité par les courbes H_1 et H_2 et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$, et D'_2 le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe H_1 et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$. Montrer que D_2 et D'_2 ont la même aire
- c) Soit n un entier naturel strictement positif. On note u_n l'aire du domaine D_n délimité par les courbes H_1 et H_2 et les droites d'équation $x = n$ et $x = n+1$. Exprimer u_n en fonction de n et montrer que la suite (u_n) est décroissante. La suite (u_n) est-elle convergente?

Exercice 3

Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne la fonction φ définie par $\varphi(x) = 2\sqrt{2x - x^2}$.

- Montrer que la courbe (Λ) de φ admet la droite (D) d'équation $x = 1$ pour axe de symétrie.
- Dresser le tableau de variations de φ .
- Soit ψ la restriction de φ au segment $[0, 1]$, montrer que ψ admet une fonction réciproque ψ^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.
- Sur quel intervalle ψ^{-1} est-elle dérivable?
- Calculer $\psi^{-1}(\frac{1}{2})$ puis $(\psi^{-1})'(\frac{1}{2})$.

Problème

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x(x+3) - 1$
 - Déterminer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - Calculer la dérivée g' de g et en déduire le tableau de variations de g .
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α qui appartient à l'intervalle $]-4, 0[$.
 - Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ en fonction des valeurs de x .
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + (x+2)e^x$ et soit (C) la courbe de f .
 - Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 - Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$.
 - Etudier, en fonction des valeurs de x , les positions relatives de (Δ) et (C) .
 - En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = e^x \left(\frac{-x}{e^x} + x + 2 \right)$$

déterminer la limite de f en $+\infty$.

- Vérifier que, pour tout réel, on a :

$$f'(x) = g(x)$$

- Dresser le tableau de variations de f .
- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point A d'abscisse 0.
- Tracer la courbe (C) , la tangente (T) et l'asymptote (Δ) dans un même repère.

- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (x+1)e^x$$

- Calculer $h'(x)$ puis en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe (C) , l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = -2$ et l'axe des ordonnées. On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.