

Sujets d'Examens et Concours National à Madagascar

a) Montrer que

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) En déduire les inégalités:

$$(1) \quad \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{m}{n}\right) \right] \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{avec} \quad I(x) = \int_x^1 f(t) dt \quad \text{pour tout } x > 0$$

$$3) \quad \text{Pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à } 2, \text{ on pose } S_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$a) \quad \text{Déduire des inégalités (1) l'encadrement} \quad I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_x^1 \ln t dt \quad \text{et en déduire} \quad I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(t) dt ; \lambda \in]0, 1[$$

$$c) \quad \text{Déterminer } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda f(\lambda) \text{ et prouver alors que } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$$

Exercice 2

Le plan complexe P est rapporté à un repère ortho normal direct $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$. On note A le point d'affixe Z . Soit φ l'application de F vers P qui à tout point M d'affixe Z associe le point $M' = \varphi(M)$ d'affixe Z' définie par :

$$Z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} Z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

1- Déterminer :

- L'affixe du point $\varphi(A)$ l'image de A par φ
- L'affixe du point P tel que $\varphi(P) = 0$

2-Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ

3-Lorsque le point M est distinct du point A :

- Démontrer que le triangle AMM' , où $M' = \varphi(M)$ est rectangle en M'
- Le point M et le milieu du segment $[AM]$ étant donnés, En déduire une construction au compas du point M'

Exercice 3

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $U_0 = 1$; $U_1 = 1$, $U_{n+2} = 4U_{n+1} - 4U_n$

On note par (R) la relation liant U_n , U_{n+1} et U_{n+2}

1- Calculer U_2 , U_3 , U_4 et U_5

2- Démontrer qu'il existe une suite géométrique unique de terme général r^n avec $r \neq 0$ satisfaisant la relation (R)

3- a - Vérifier alors que, quels que soient les réels α et β , la suite (V_n) définie par

$$V_n = (\alpha n + \beta) r^n$$

Où r est le réel calculé en 2, vérifier la relation (R) .

b - Calculer α et β pour que (V_n) vérifie les conditions initiales $V_0=1$ et $V_1=1$

c - On suppose que pour tout entier réel n , $V_n = (2-n) 2^{n-1}$

Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 on a $2-n \leq -2$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

Sujets d'Examens et Concours National à Madagascar

Session 1999

Exercice 1

1) a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+3^n)}{4n} = 0$

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+n3^n)}{4n} = \frac{\ln 3}{4}$

2) Pour tout entier naturel n , on pose

$$U_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{3^n x}{1+n3^n x^2} dx$$

- a- Calculer U_0
- b- Calculer U_n pour tout entier $n > 1$
- c- Etudier la convergence de la suite (U_n)

Exercice 2

Un tournoi oppose deux joueurs A et B qui jouent trois parties successives d'un même jeu. Le vainqueur du tournoi est le joueur qui a gagné le plus de parties.

A chaque partie, le joueur A a une probabilité de 0,5 de gagner et une probabilité de 0,3 de perdre

- 1-a- Dresser la liste des tournois sans vainqueur
- b- Montrer que la probabilité que le tournoi soit sans vainqueur est égale à 0,188
- 2-a- Calculer la probabilité que le joueur A gagne exactement une partie du tournoi et remporte le tournoi
- b- Montrer que la probabilité que le joueur A soit vainqueur du tournoi est 0,560

Exercice 3

1) Etudier les variations des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{x+1}$$

$$g(x) = \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{x}$$

2) En déduire que pour tout entier naturel $p > 0$, on a :

$$\frac{1}{p+1} < \ln(p+1) - \ln p < \frac{1}{p}$$

3) Soit la suite (U_n) définie pour $n \geq 1$ par $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

4) Soit la suite (V_n) définie pour $n \geq 1$ par $V_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

- a. Montrer que pour $n \geq 1$, $V_n > 0$
- b. Montrer que (V_n) est une suite décroissante
- c. Conclure

Session 2000

I. Un sac contient cinq boules blanches : deux portent le numéro 0 ; deux le numéro 1 et une le numéro 3 et cinq boules noires dont une porte le numéro 0 et quatre le numéro 3. Chaque boule a la même probabilité d'être tirée.

1. On tire simultanément trois boules du sac au hasard. Quelle est la probabilité des événements suivants :

B « les boules sont différentes »

A « les numéros des boules sont impairs »

Sujets d'Examens et Concours National à Madagascar

2. Maintenant on tire une boule au hasard et on le remet dans le sac. On effectue ainsi deux tirages successifs. On désigne par « a » le numéro apparu sur la première boule tirée et par « b » celui sur la deuxième boule. On associe à cette épreuve la suite (U_n) définie par son premier terme non nul U_0 et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = a U_n + b$.

Calculer la probabilité des événements :

N : « (U_n) est une suite géométrique non constante »

T : « (U_n) est une suite arithmétique non constante »

3. Cette fois-ci, on tire une boule du sac. Si on obtient le numéro 1, on s'arrête ; sinon on remet la boule dans le sac et on recommence le tirage. On procède ainsi jusqu'à ce qu'on obtienne le numéro 1. On désigne par k le nombre de tirage qu'il a fallu faire pour obtenir la boule numérotée 1.

Déterminer la probabilité P : « le nombre $k > 3$ ».

II. 1. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1}$

a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

b. Dresser le tableau de variation de g . En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel, x strictement positif.

2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x] \end{cases} \quad \text{Si } x > 0$$

a. Etudier la continuité de f en 0 puis la dérivabilité de f en 0

b. Calculer $f'(x)$, $\forall x > 0$ et déterminer le signe de $f'(x)$

c. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (On pourra écrire $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$)

d. Dresser le tableau de variation de f .

3. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité : 4cm)

a. Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Déterminer l'intersection de (T) et de l'axe $y'y$.

b. Construire (C) et (T) .

Session 2001

Exercice 1

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |1 - e^{-x}| - 2x$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

2. a. Etudier les variations de f

b. Etudier les branches infinies de la courbe représentative C de la fonction f .

c. Tracer C .

Exercice 2

Soit g l'application de $E = \mathbb{C} - \{-2i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$z \rightarrow g(z) = \frac{iz + 4 - 2i}{z + 2i}$$

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $g(z) = iz + 1 - 2i$

On notera z_1 et z_2 les deux solutions, avec $|z_1| < |z_2|$

b. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $(z_2)^n$ est un entier négatif

2. Soit M le point d'affixe z .

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\frac{\pi}{2}$ soit une mesure de l'argument de $g(z)$.

Exercice 3

Sujets d'Examens et Concours National à Madagascar

Les statistiques montrent que dans une région agricole X, si la production de riz est bonne une année, la probabilité qu'elle soit encore bonne l'année suivante est 0,7 et que si elle est mauvaise une année, la probabilité qu'elle reste mauvaise l'année suivante est 0,6.

1. La production de riz de cette région a été bonne en 1999.
Calculer la probabilité qu'elle soit bonne en l'an 2001
2. Si la production sera mauvaise en l'an 2000.
Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une année de bonne récolte avant l'année 2003

Session 2002

Exercice 1

1. a. Calculer pour tout réel x différent de -1 , la somme :
$$S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1}, \quad (n \geq 1)$$

b. En déduire les inégalités $\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx = \ln 2 - \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \right]$
2. a. Montrer que pour tout $n \geq 1$; pour tout $x \in [0; 1]$
$$-(x^n) \leq \frac{(-x)^n}{1+x} \leq x^n$$

b. En déduire les inégalités
$$-\frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

c. Calculer la limite, quand $n \rightarrow +\infty$ de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par
$$U_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{(n-1)}}{n}$$
3. a. Calculer en fonctions de n et x , la somme $e^x S_n(e^x)$
b. Calculer l'intégrale $(-1)^n \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x} dx$

Exercice 2

1. On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ce dé est pipé, de telle sorte que chaque face portant le chiffre x , on associe par une application p , le nombre réel $p(x) = \ln \alpha^x$, $\alpha > 0$; $x \in \{1, 2, \dots, 6\}$, $\ln =$ Logarithme Népérien
 - a. Déterminer α pour que p soit une probabilité ?
 - b. On lance une fois ce dé. Donner la probabilité d'apparition de chacune de ses faces.
2. On considère maintenant deux dés cubiques discernables et non pipés D_1 et D_2 . Chacun de ces deux dés porte sur ces faces les numéros de 1 à 6.
On jette simultanément les 2 dés et on attend qu'ils s'immobilisent, et on observe les numéros marqués sur la face supérieure des deux dés. On suppose que les événements élémentaires sont équiprobables.
Soit l'univers $\Omega = \{(i, j) / i \in D_1, j \in D_2\}$ où $i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$
 - a. Calculer la probabilité pour que $\text{Inf}(i, j) = 4$ où $\text{Inf}(i, j)$ désigne le plus petit des deux numéros i et j
 - b. Calculer la probabilité pour que le produit $i \cdot j = 25$ soit obtenu exactement deux fois, si on jette 3 fois et indépendamment les deux dés

Exercice 3

Soit la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x \ln |x| \quad \text{Si } x \text{ différent de zéro} \end{cases}$$

Sujets d'Examens et Concours National à Madagascar

Session 2003

Exercice 1

I. Un jeu forain utilise une roue divisée en dix secteurs identiques : sept sont verts, trois sont rouges. On fait tourner la roue, et lorsqu'elle s'arrête, un index désigne un secteur, chaque secteur ayant la même probabilité d'être obtenu.

1. On lance une fois la roue. Préciser l'ensemble E des résultats possibles.

Déterminer la probabilité de chacun des éventualités de E. On dit que l'on a déterminé la loi de probabilité de E.

2. Jouer une partie est l'expérience aléatoire consistant à faire tourner la roue trois fois de suite, de façon indépendante, en notant à chaque arrêt la couleur obtenue. Soit Ω l'ensemble des résultats obtenus.

- Donner les éléments de Ω .
- Montrer que la probabilité d'obtenir trois fois vert est égale à 0,343.
- Calculer la probabilité de :
 - « obtenir au moins une fois rouge »
 - « obtenir exactement deux fois rouge »

II. On partage un cake rectangulaire contenant n raisins secs en 8 parts égales. On suppose que les raisins sont répartis au hasard.

1. On suppose que $n=10$.

Quelle est la probabilité pour qu'une part donnée contienne exactement 2 raisins ?

2. Etant donné l'entier k tel que $0 \leq k \leq n$

- Quelle est la probabilité pour qu'une part donnée contienne exactement k raisins ?
- Calculer en fonction de n la probabilité pour qu'une part donnée contienne au moins

un raisin ?

Exercice 2

- Calculer le PGCD des deux nombres 138.807 et 52.089.
- Montrer que les deux nombres entiers 4312 et 1755 sont premiers entre eux.
- Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Exercice 3

- Soit la fonction définie sur l'intervalle $J = [1 ; 3]$ telle que $f(x) = 1 - x + \ln(1+x)$
 - Dresser le tableau de variation de f
 - Montrer que f est une bijection de I vers J que l'on déterminera.
 - En déduire qu'il existe un seul nombre réel $\alpha \in]1;3[$ tel que $f(\alpha) = 0$

- Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $U_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$
 $U_{n+1} = g(U_n)$ avec g la fonction définie pour tout x de $I = [1 ; 3]$
 $g(x) = 1 + \ln(1+x)$

- Montrer que g est une fonction croissante.
- En déduire que :
 - Pour tout x de I, g(x) appartient à I
 - Pour tout n de $\mathbb{N}$, (U_n) appartient à I

- a- Montrer que pour tout x de I, $\frac{1}{4} \leq g' \leq \frac{1}{2}$.

b- Démontrer que pour tout x de I, on a $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ où α définie dans 1)

c- En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

- a- Montrer que pour tout entier naturel non nul, on a $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

b- En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

c- Déterminer le plus petit entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \geq n_0$ on a

$$|U_n - \alpha| < 10^{-2}$$

On donne $\ln 2 = 0,7$ $\ln 3 \approx 1,1$ $\ln 10 \approx 2,3$

Session 2004

Exercice 1

Une urne contient 5 jetons identiques portant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5.

1. On extrait au hasard, un à un, les cinq jetons et on obtient 5 chiffres. Quelle est la probabilité des événements suivants :

- Obtenir un nombre pair
- Obtenir un nombre divisible par 15

2. Maintenant on extrait simultanément deux jetons de l'urne. On demande à un joueur de faire deux essais de suite. Quelle est la probabilité pour que le joueur obtienne deux fois le couple (pair, impair) ou (impair, pair).

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 + iz^2 + (1-i)z + 2 - 2i = 0$ sachant qu'elle admet une racine réelle z_0 et une racine imaginaire pure z_1 . On notera z_2 la troisième racine.

2. a- Donner la forme trigonométrique de z_0, z_1, z_2

b- déterminer les entiers naturels n pour lesquels z_2^n est un réel négatif.

3. Dans un plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et M d'affixes respectives $1+i$; $-2i$ et z , avec $z = -2i$.

On pose : $Z = \frac{z-1-i}{z+2i}$

Sans écrire l'équation, déterminer et tracer :

a- L'ensemble (E_1) des points M tel que Z soit réel

b- L'ensemble (E_2) des points M tel que $|Z|=1$

c- L'ensemble (E_3) des points M tel que $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-1}{4} - 2\ln x$ où $\ln$ est la fonction logarithme népérien.

1. a- Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède deux solutions et deux seulement dont l'une entière et l'autre $x_0 \in [3;4]$ (on ne demande pas de calculer x_0)

b- Montrer que $x_0 = \sqrt{1+8\ln x_0}$

2. Soit h la fonction définie sur $[3;+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{1+8\ln x}$

3. Montrer que $h(x) \geq 3$ et que $0 \leq h'(x) \leq \frac{4}{9}$

4. Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = h(U_n) = \sqrt{1+8\ln U_n}$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 3$

5. a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|U_{n+1} - x_0| \leq \frac{4}{9}|U_n - x_0|$

Sujets d'Examens et Concours National à Madagascar

- b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|U_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$. En déduire la convergence de (U_n)
- c- Trouver un entier n_0 tel que $|U_n - x_0| < 10^{-2}$

Session 2005

Exercice 1

1. Calculer $(1 - 2i)^4$
2. a- Quelles sont les racines quatrièmes de $(-7 + 24i)$?
b- Placer dans un repère orthonormé les images de ces racines.
3. calculer les racines quatrièmes de $(7 - 24i)$

Exercice 2

A. Dans un lycée comptant 1600 élèves : 640 ont déclaré aimer la S.V.T. ; 960 les mathématiques et 240 la S.V.T et les mathématiques.

On rencontre au hasard un élève de ce lycée. Quelle est la probabilité que cet élève

- a. aime la S.V.T. mais pas les mathématiques
- b. aime les mathématiques mais pas la S.V.T.
- c. n'aime ni la S.V.T. ni les mathématiques

B. a- Trouver tous les entiers naturels a et b , avec $a < b$, connaissant leur PGCD 42 et leur PPCM 1.680

b- Déterminer tous les entiers relatifs x vérifiant : $8x \equiv 7 \pmod{5}$

Exercice 3

1. Déterminer trois réelles a, b, c tels que pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$$

Dans toute la suite on prendra $a = 1, b = c = -1$

2. a- Soit $m > 1$;

Calculer $\int_1^x \frac{dx}{x(1+x)^2}$

b- Soit la fonction φ définie sur $]1; +\infty[$ par $\varphi(x) = \int_1^x \frac{\ln x}{1+x^2} dx$

En intégrant par parties, calculer $\varphi(x)$ en fonction de x .

c- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} = 0$ En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$

Session 2006

Exercice 1

A. Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$

1. Etudier le sens de variation de I_n

2. Montrer que, pour tout x de $[0;1]$, on a : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$

En déduire un encadrement de I_n et la limite de la suite (I_n)

Sujets d'Examens et Concours National à Madagascar

B. On considère les intégrales :

$$I = \int_0^x e^t \cos^2 t dt \quad J = \int_0^x e^t \sin^2 t dt \quad \text{pour } x \text{ réel}$$

1. Calculer I+J, puis I-J
2. En déduire I et J

Exercice 2

Dans le plan complexe muni de repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on note (E) l'ensemble des points M, d'affixe z telle que : $|(1-i)z + 4i| = 3\sqrt{2}$ (1)

1. On pose $z = x + iy$; x et y nombres réels.
 - a- Déterminer une équation cartésienne de (E)
 - b- Représenter (E)
2. a- Vérifier que l'égalité (1) est équivalente à $|z - (2 - 2i)| = 3$
b- Caractériser géométriquement (E).
3. Soit s la similitude d'écriture complexe : $z' = (1-i)z + 4i$
 - a- Déterminer les éléments géométriques de s.
 - b- Quelle est l'affixe du point O' dont l'image par s est O ?
 - c- Calculer O'M lorsque M est un point de (E) et caractériser (E).

Exercice 3

Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs.

Une urne contient 6 boules numérotées par les 6 premiers nombres premiers. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

On note :

A : l'événement « la somme des numéros des 3 boules tirées est premiers »

B : l'événement « le numéro 2 figure parmi les 3 boules tirées »

C : l'événement « la somme des numéros des 3 boules tirées est paire »

1. Calculer le nombre de tirages possibles.
2. Calculer P(A), probabilité de A.
3. a- Calculer P(B) et P(C), probabilités respectives de B et C
b- Que constate t'on ? Expliquez.

Session 2007

Exercice I

Pour tout n entier naturel, on considère les intégrales suivantes

$$I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx} \sin(x) dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx} \cos(x) dx$$

- 1) Calculer I_0 et J_0 .
- 2) Soit n un entier naturel non nul.
 - a. En intégrant par partie I_n puis J_n prouver que I_n et J_n vérifiant le système.

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nJ_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

- b. En déduire, pour n entier naturel non nul, les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

- 3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n) = 0$

Exercice II

1. Calculer le module et l'argument du nombre complexe : $z = \frac{1}{1+itg x}$ suivant les valeurs de α ; $\alpha \in]-\pi, \pi]$

2. Placer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les images respectives A et B, des nombres complexes

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

3. Soit l'image du nombre complexe

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$Z = x + iy$ où x est un réel quelconque

Calculer le module r et l'argument θ de Z

Exercice III

On considère l'équation (E) $8x + 5y = 1$, où $(x ; y)$ est u couple de nombre entiers relatifs.

- Donner une solution particulière de l'équation (E)
- Résoudre l'équation (E).
- Soit k un nombre naturel tel qu'il existe u couple $(a ; b)$ de nombres entiers vérifiant.

$$\begin{cases} k = 8a + 1 \\ k = 5b + 1 \end{cases}$$

- Montrer que le couple $(a ; -b)$ est solution de (E)
- Quel est le reste, dans la division de k par 40.

Exercice IV

Un élève se présente à un examen, ayant étudié seulement deux des seize chapitres de son cours. L'examineur sujet portant chacun sur un différent. Il fait tirer au candidat simultanément et au hasard n questions ($1 \leq n \leq 16$); on entend par « au hasard » l'équiprobabilité des tirages.

- Si $n=2$, quelle est la probabilité pour que le candidat tire au moins une question qu'il a étudiée ?
- Pour quelles valeurs de n la probabilité pour que le candidat tire au moins une question qu'il a étudiée est-elle strictement supérieur à $\frac{1}{2}$?

PHYSIQUE (durée 1 heure)

Session 1998

MOUVEMENT D UN PROJECTILE

Dans tout le problème, les forces de frottement seront négligées. On prendre pour valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

Du point A d'un plan incliné de l'angle α sur le plan horizontal HOCM, on abandonne sans vitesse initiale un corps assimilable à un point matériel B de masse m . Il glisse selon la ligne de plus grande pente AO et arrive en O avec une vitesse $\vec{v}_0$.

Le plan incliné se raccorde en O avec une piste circulaire de rayon R . Au delà du point C, le mobile quitte la piste et retombe sur le plan horizontal (voir figure). Le vecteur vitesse du mobile en C ($\vec{v}_c$) fait, avec le plan horizontal le même angle que AO

